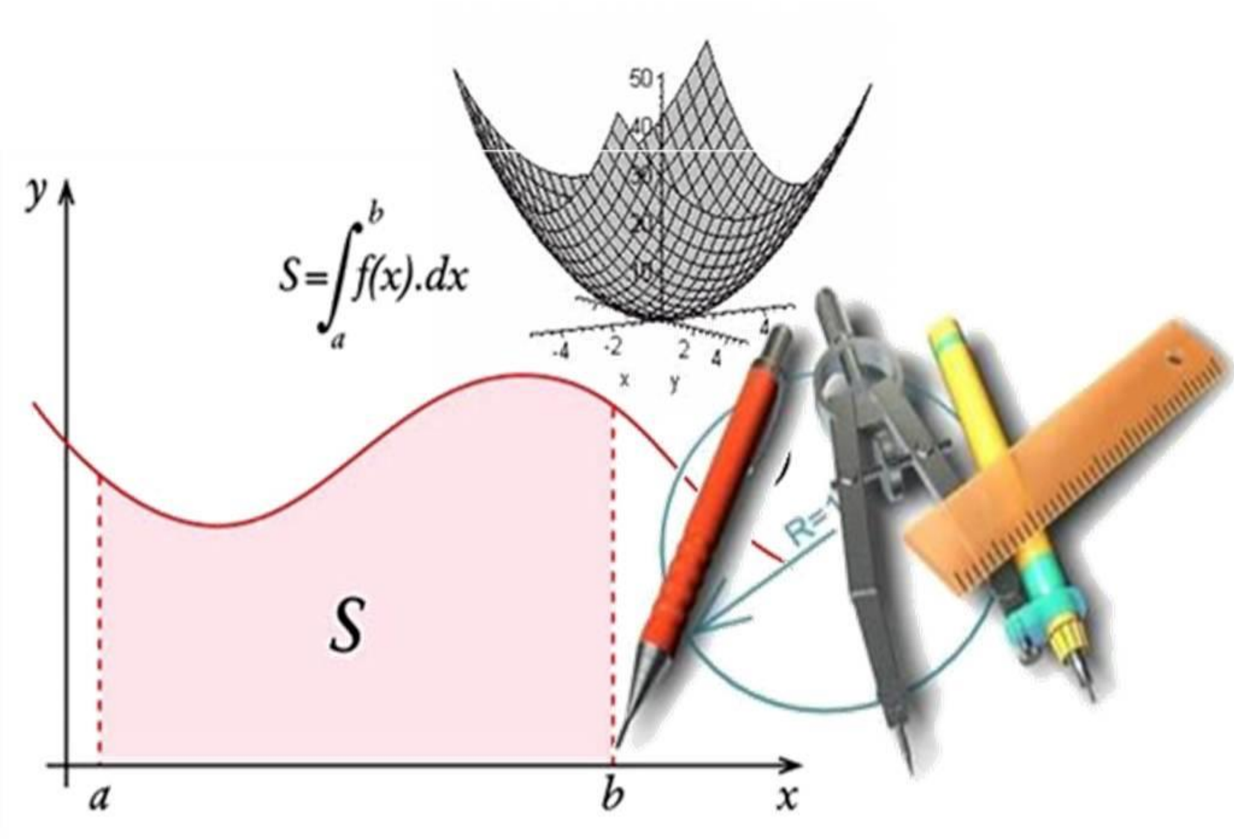
เอกสารประกอบการสอน

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 (ค33202)

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น



โดย

นางวัชรี ขันเชื้อ

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

โรงเรียนเทศบาล 4 ระบบสาธิตเทศบาลเมืองลพบุรี

เทศบาลเมืองลพบุรี อำเภอเมืองลพบุรี จังหวัดลพบุรี

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 รหัสวิชา ค33202 จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นเครื่องมือสำหรับปรับปรุง พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นอกจากนี้ยังเป็นคู่มือในการสอนซ่อมเสริมแก่ผู้เรียน เพื่อลดปัญหาเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคลได้ด้วย โดยได้รวบรวมเนื้อหาที่เป็นความรู้จากตำรา และเอกสารทางวิชาการหลากหลาย มีตัวอย่างและข้อคำถามเพื่อทบทวนความรู้ความเข้าใจในบทเรียน และเมื่อเสร็จสิ้นกระบวนการเรียนรู้ตามลำดับขั้นตอนแล้ว นักเรียนจะได้รับการทดสอบ เพื่อประเมินผลการเรียนรู้ โดยกำหนดเนื้อหาย่อยออกเป็น 9 เล่ม ดังนี้

เล่มที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

เล่มที่ 2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เล่มที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

เล่มที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

เล่มที่ 5 ความชันของเส้นโค้ง

เล่มที่ 6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท และอนุพันธ์อันดับสูง

เล่มที่ 7 การประยุกต์อนุพันธ์

เล่มที่ 8 กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์ หรือการอินทิเกรต

เล่มที่ 9 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 รหัสวิชา ค33202 ชุดนี้ จะมีส่วนช่วยในการศึกษาเนื้อหาให้เข้าใจได้ง่าย ตลอดเสริมสร้างการเรียนรู้ด้วยตนเองให้มีความชัดเจนยิ่งขึ้น สามารถพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติของผู้เรียนให้สูงขึ้นได้ และหวังว่าคงเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจที่จะนำไปใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอน และนวัตกรรมทางการศึกษา

วัชรี ขันเชื้อ

สารบัญ

คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการสอนสำหรับครู
เอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 (ค33202) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 (ค33202) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6จัดทำขึ้นเพื่อเป็นเครื่องมือช่วยในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เป็นสื่อการเรียนการสอนที่นักเรียนสามารถใช้เป็นคู่มือเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ด้วยตนเองให้บรรลุวัตถุประสงค์อย่างมีประสิทธิภาพ ครูผู้สอนควรดำเนินการดังนี้

1. ครูผู้สอนต้องศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับคู่มือครู แผนการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้ครูนำเอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ไปใช้จัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพต่อไป
2. ผู้สอนจัดเตรียมสื่อการเรียนการสอนอื่นๆ พร้อมใบงานต่างๆ สำหรับนักเรียนให้พร้อมและเพียงพอ
3. ก่อนดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูต้องจัดเตรียมเอกสารประกอบการสอนให้เพียงพอกับจำนวนนักเรียน

4. ก่อนดำเนินการปฏิบัติกรรมการเรียนรู้ ครูต้องชี้แจงให้นักเรียนรู้จักและเข้าใจบทบาทหน้าที่ของนักเรียนในการเรียนรู้โดยใช้เอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการเรียนรู้ดังนี้

4.1 ศึกษาสาระสำคัญ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ในเรื่องที่จะเรียนให้เข้าใจเสียก่อน

4.2 นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน

4.3 ศึกษาเนื้อหาในใบความรู้ และทำแบบฝึกทักษะให้ครบ แล้วตรวจคำตอบ บันทึกคะแนนของแต่ละแบบฝึกทักษะให้ครบ

4.4 ถ้าพบว่ามีนักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะได้ผลสัมฤทธิ์ต่ำกว่า ร้อยละ 80 ให้ย้อนกลับไปศึกษาเนื้อหาใบความรู้ใหม่ และทำการประเมินความรู้จากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง

4.5 นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน

4.6 ตรวจคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

4.7 นักเรียนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่ดูเฉลยคำตอบทั้งก่อน และระหว่างการทำแบบฝึกทักษะโดยเด็ดขาด

คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการสอนสำหรับนักเรียน
เอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 (ค33202) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 (ค33202) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6เป็นเอกสารที่นักเรียนสามารถศึกษาในชั้นเรียนปกติหรือเรียนรู้ด้วยตนเอง ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ ทำตามคำชี้แจงแต่ละขั้นตอนตั้งแต่ต้นจนจบ นักเรียนจะได้รับความรู้อย่างครบถ้วน โดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ศึกษาสาระสำคัญ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ในเรื่องที่จะเรียนให้เข้าใจเสียก่อน

2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน

3. ศึกษาเนื้อหาในใบความรู้ และทำแบบฝึกทักษะให้ครบ แล้วตรวจคำตอบ บันทึกคะแนนของแต่ละแบบฝึกทักษะให้ครบ

4. ถ้าพบว่ามีนักเรียนคนใดทำแบบฝึกทักษะได้ผลสัมฤทธิ์ต่ำกว่า ร้อยละ 80 ให้ย้อนกลับไปศึกษาเนื้อหาใบความรู้ใหม่และทำการประเมินความรู้จากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง

5. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน

6. ตรวจคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

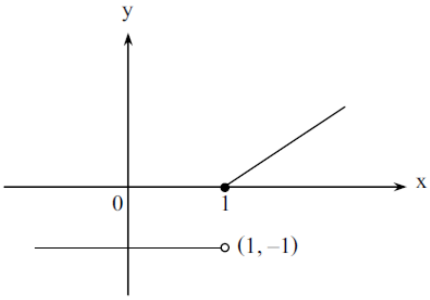
7. นักเรียนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่ดูเฉลยคำตอบทั้งก่อนและระหว่างการทำแบบฝึกทักษะโดยเด็ดขาด

8. หากนักเรียนต้องการศึกษาเพิ่มเติมสามารถศึกษาได้จากหนังสือเรียนและเอกสารที่ปรากฏในบรรณานุกรมท้ายเล่มเอกสารประกอบการสอน เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ก่อนเรียน
เรื่อง การลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง : แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน ฉบับนี้มีข้อสอบ 15 ข้อ เป็นแบบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ หน้าคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 1 คะแนน เวลาที่ใช้ในการสอบ 20 นาที

1. จากกราฟที่กำหนดให้ ข้อใดไม่ถูกต้อง



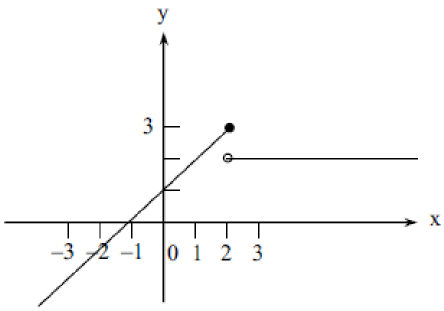
ก. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$

ข. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

ค. $\lim_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ง. $\lim_{x\to 1} f(x) = -1,0$

2. จากกราฟที่กำหนดให้ข้อใดไม่ถูกต้อง



ก. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

ข. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

ค. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3,2$

ง. $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$ แล้ว f(x) มีลิมิตที่ 0 หรือไม่

ก. มี เพราะ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

ข. มีเพราะ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

ค. ไม่มี เพราะ $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ง. ไม่มี เพราะ $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm 1$

4. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 5

ข. 6

ค. 7

ง. 8

5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ เท่ากับข้อใด

ก. 1 ข. 3

ค. -1 ง. -3

6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ เท่ากับเท่าใด

ก. 0 ข. 0.25

ค. 0.50 ง. 0.65

7. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{5}{7}$ ข. $\frac{6}{7}$

ค. $\frac{8}{7}$ ง. $\frac{9}{7}$

8. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ เท่ากับข้อใด

ก. 3 ข. 2

ค. 1 ง. 0

9. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ เท่ากับข้อใด

ก. 0 ข. 4

ค. -4 ง. 6

10. ถ้า f(x) = $\begin{cases} 3x & ; x > 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \le 2 \end{cases}$ แล้ว $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. 6 ข. 9

ค. 11 ง. หาค่าไม่ได้

11. ถ้า f(x) = $\begin{cases} x + 1 & ; x \le 3 \\ 3 & ; x > 3 \end{cases}$ แล้ว $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. 7 ข. 9

ค. 10 ง. หาค่าไม่ได้

12. $\lim_{x\to 2^-}|2x-3|$ เท่ากับข้อใด

ก. -1 ข. 1

ค. -3 ง. หาค่าไม่ได้

13. $\lim_{x\to 5}(x^4)(x-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 500 ข. 5

ค. 2,500 ง. 5^7

14. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{1-x}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. α ข. 0

ค. 6 ง. -6

15. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. $\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right) = 10$ ข. $\lim_{x\to 9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right) = \frac{1}{6}$

ค. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x^2-x-2}\right) = 1$ ง. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+x-3}{x^2+4x-5}\right) = \frac{5}{6}$

ผลการเรียนรู้ หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถบอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่ และถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้

สาระสำคัญ

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ และ a เป็นจำนวนจริงแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายมือและขวามือของ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x) = L$

นั่นคือ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

ใบความรู้ที่ 1
เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of function)

ลิมิตของฟังก์ชัน

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ อ่านว่า **"ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a"** หมายถึง ค่าประมาณของ f(x) เมื่อ x มีค่าประมาณ a

เช่น ถ้า $f(x) = 2x + 5$ จะเห็นว่าเมื่อ x ประมาณ 4 จะได้ f(x) ประมาณ $2(4) + 5 = 8 + 5 = 13$ ดังนั้นอาจสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x \to 4} 2x + 5 = 13$

1. ลิมิตด้านเดียว (One-side limits)

1.1 ลิมิตซ้าย (left-hand limits)

กำหนดฟังก์ชัน f(x) และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ f(x) เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

1.2 ลิมิตขวา (right-hand limits)

กำหนดฟังก์ชัน f(x) และ a เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง L ที่ทำให้ค่าของ f(x) เข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทางขวามือ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ f(x) = x^2+x+1 จงพิจารณาว่า f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 3

จงหา 1) $\lim\limits_{x\to 3^-} x^2+x+1$

2) $\lim\limits_{x\to 3^+} x^2+x+1$

วิธีทำ 1) สร้างตารางความสัมพันธ์ของ x และ y เมื่อ x < 3 และมีค่าเข้าใกล้ 3 บางค่า ดังนี้

x	2.9	2.99	2.999	...
f(x) = x^2 + x + 1	12.31	12.9301	12.993001	...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-} x^2+x+1 =$ 13

2) สร้างตารางความสัมพันธ์ของ x และ y เมื่อ x > 3 และมีค่าเข้าใกล้ 3 บางค่า ดังนี้

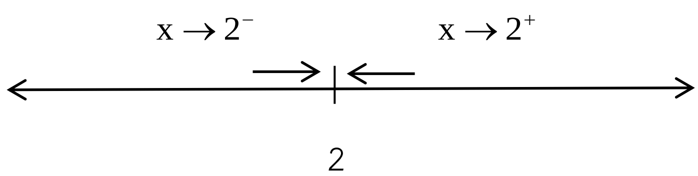
x	3.1	3.01	3.001	...
f(x) = x^2 + x + 1	13.71	13.0701	13.007001	...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3^+} x^2+x+1 =$ 13

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ f(x) = x^2-2x+4 เมื่อ x เข้าใกล้ 2

จงหา 1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$



วิธีทำ 1) สร้างตารางความสัมพันธ์ของ x และ y เมื่อ x <2และมีค่าเข้าใกล้ 2 บางค่า ดังนี้

x	1.9	1.99	1.999	...
f(x) = x^2	3.61	3.9601	3.996001	...

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ 4

2) สร้างตารางความสัมพันธ์ของ x และ y เมื่อ x >2 และมีค่าเข้าใกล้ 2 บางค่า ดังนี้

x	2.1	2.01	2.001	...

f(x) = x + 2	4.1	4.01	4.001	...

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 9 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

จงหา 1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

วิธีทำ 1) สร้างตารางความสัมพันธ์ของ x และ y เมื่อ x <1และมีค่าเข้าใกล้ 1บางค่า ดังนี้

x	0.9	0.99	0.999	...
f(x) = x + 5	6.8	6.98	6.998	...

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 7$

2) สร้างตารางความสัมพันธ์ของ x และ y เมื่อ x >1และมีค่าเข้าใกล้ 1บางค่า ดังนี้

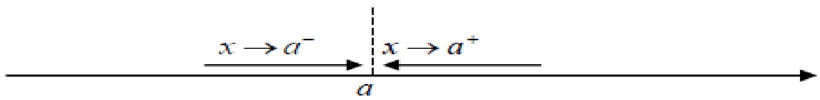
x	1.1	1.01	1.001	...
f(x) = 9	9	9	9	...

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 9$

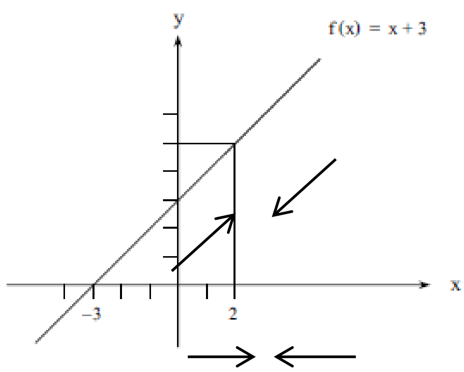
จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

2. ลิมิตสองด้าน (Two-side limits)

เป็นการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันทั้งทางซ้ายและลิมิตทางขวา ของจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง นั่นคือ ต้องการพิจารณาค่าของ f(x) ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ซึ่งคำว่า “เข้าใกล้ a” หมายถึง เข้าใกล้ทั้งสองด้าน คือ ด้านซ้ายมือของ a และด้านขวามือของ a



เช่น กำหนดฟังก์ชัน f(x) = x + 3 เป็นกราฟเส้นตรง ดังรูป



จากกราฟ f(x) จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จะพบว่า

ถ้า $x \to 2^-$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 5$

ถ้า $x \to 2^+$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 5$

สรุปได้ว่า

ลิมิตของ f(x) ในขณะที่ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ 5 จึงเขียนแทนได้ด้วย $\lim\limits_{x\to2} f(x) =$

5

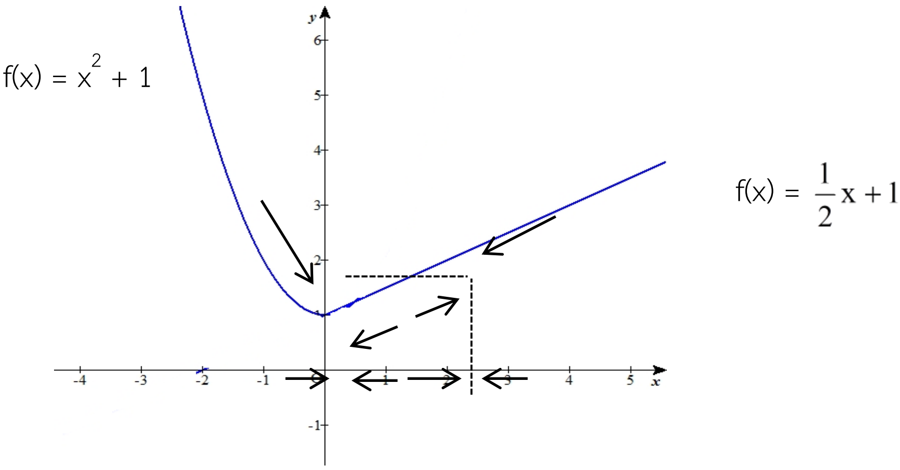
กำหนดฟังก์ชัน f(x) และ a เป็นจำนวนจริงแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน f(x) ในขณะที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทั้งทางด้านซ้ายมือและขวามือของ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ นั่นคือ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{เมื่อ } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x+1 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$

จงหา 1) $\lim_{x\to 0} f(x)$ 2) $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ



จากกราฟของ f(x) จะพบว่า

1) เมื่อ $x < 0$ แล้วจะได้ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$

เมื่อ $x > 0$ แล้วจะได้ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1$

2) เมื่อ $x < 2$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(\frac{1}{2}x+1) = 2$

เมื่อ $x > 2$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(\frac{1}{2}x+1) = 2$

สรุปหลักการของลิมิตด้านเดียวและลิมิตสองด้านของฟังก์ชัน

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน f และ a เป็นจำนวนจริงแล้ว ลิมิตของ f(x) ในขณะที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L ก็ต่อเมื่อ ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายและทางขวา ซึ่งเขียนข้อความของ ลิมิตของ f(x) ในขณะที่ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ L แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

หมายเหตุ

1. กรณีที่ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = B$ โดยที่ $A \neq B$ จะกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. ถ้า $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ แล้วจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ f(x) = $\begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x < -1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 1^-$ และกรณี $x \to 1^+$

ดังนั้นจึงต้องแยกหาลิมิตซ้ายขวา

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+2 = (-1)+2 = 1$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ f(x) = $\begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ x^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 1^-$ และกรณี $x \to 1^+$

ดังนั้นจึงต้องแยกหาลิมิตซ้ายขวา

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+2 = 1+2 = 3$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหา $\lim_{x \to 0} f(x)$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f มีค่าสัมบูรณ์ของ x ดังนั้น ฟังก์ชัน f จะถูกแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ \frac{-x}{x} & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 0^-$ และกรณี $x \to 0^+$

ดังนั้นจึงต้องแยกหาลิมิตซ้ายขวา

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

จะเห็นว่า $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

แบบฝึกทักษะชุดที่ 1
เรื่อง การหาลิมิตข้างเดียวของฟังก์ชัน

คำชี้แจง จงหาลิมิตของฟังก์ชันโดยพิจารณาลิมิตข้างเดียวโดยใช้ตารางแสดงความสัมพันธ์

1. จงพิจารณาฟังก์ชัน f(x) = x + 5 ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 โดยเติมค่าของ f(x) ลงในตารางต่อไปนี้

x < 2		x > 2	
x	f(x)	x	f(x)
1.5	....	2.5	....
1.9	....	2.1	....

$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ....

$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ....

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ ....

1.99	....	2.01	....
1.999	....	2.001	....

2. จงพิจารณาฟังก์ชัน f(x) = 2x – 1 ขณะที่ x เข้าใกล้ 3 โดยเติมค่าของ f(x) ลงในตารางต่อไปนี้

x <3		x >3	
x	f(x)	x	f(x)
2.5	....	3.5	....
2.9	....	3.1	....
2.99	....	3.01	....
2.999	....	3.001	....

$\lim_{x\to 3^-} f(x) =$ ....

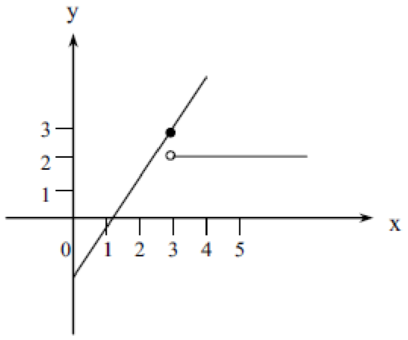
$\lim_{x\to 3^+} f(x) =$ ....

$\lim_{x\to 3} f(x) =$ ....

แบบฝึกทักษะชุดที่ 2
เรื่อง การหาลิมิตของฟังก์ชันจากกราฟ

คำชี้แจง จงหาลิมิตจากกราฟที่กำหนดให้

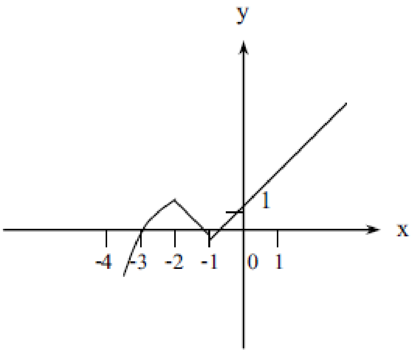
1.



$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ ....

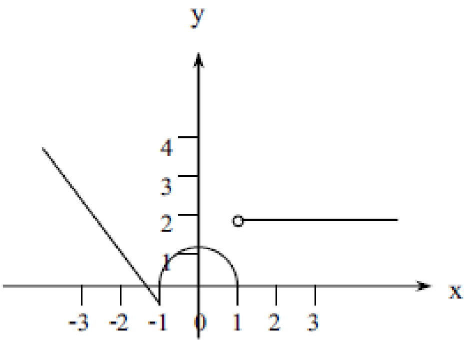
2.



$\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$ ....

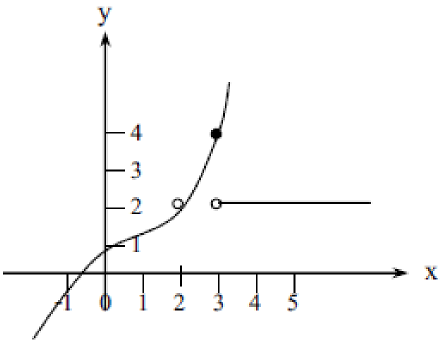
3.



$\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ ....

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ ....

4.



$\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ ....

$\lim_{x \to 3} f(x) =$ ....

แบบฝึกทักษะชุดที่ 3

เรื่อง การหาลิมิตสองด้าน

คำชี้แจง จงหาค่าของลิมิตจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 4x-1 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

....

....

....

....

2. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

....

....

....

....

3. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 2x - 3 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

....

....

....

....

4. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^2 - 1}$

....

....

....

....

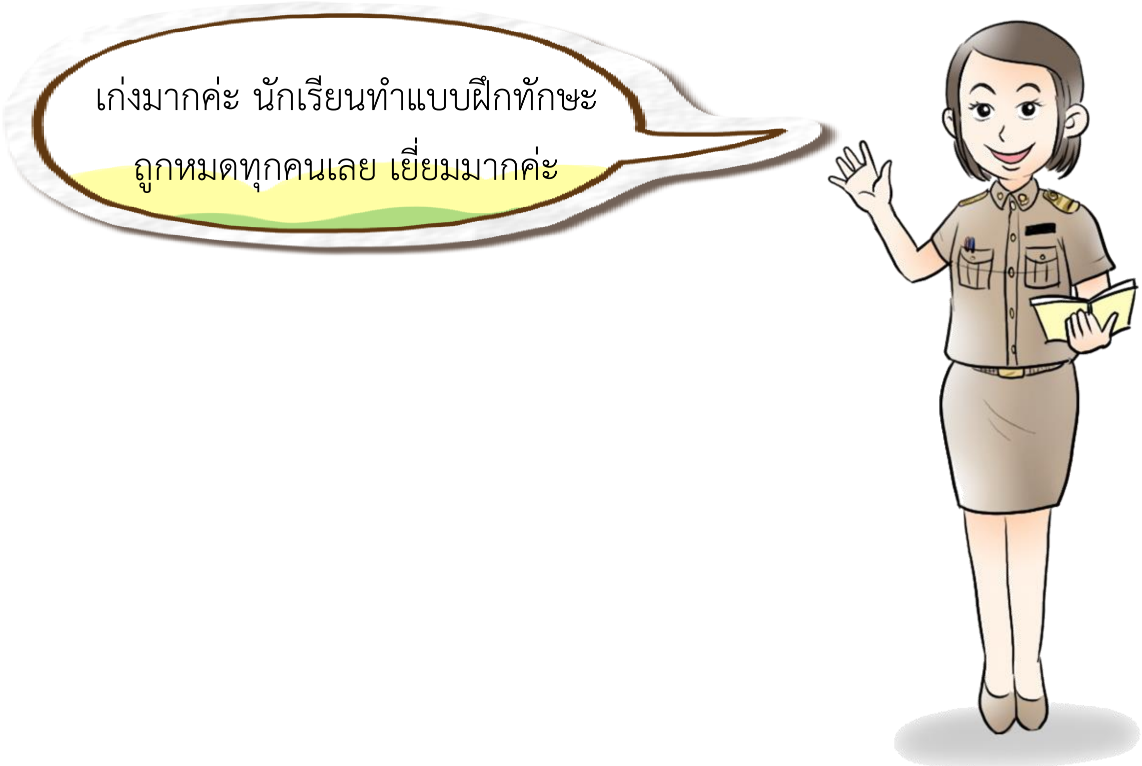
5. จงหาค่า $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

....

....

....

....



ในการหา $\lim_{x\to a} f(x)$ เราจะลองแทนค่า x = a ก่อนเป็นอันดับแรก

เช่น $\lim_{x\to 1} 2x - 7$ = (2×1) – 7 = -5

$\lim_{x\to -3} x^2 - 2x + 3 =$ $(-3)^2$ – 2(-3) + 3 = 9 + 6 + 3 = 18

$\lim_{x\to -1} 2^x + 3$ = $\frac{1}{2}$ + 3 = $\frac{7}{2}$

เมื่อเราหาค่า $\lim_{x\to a} f(x)$ ด้วยการแทนค่า x = a ก่อน เป็นอันดับแรกดังตัวอย่างข้างบน แต่ถ้าบางกรณีที่เราไม่สามารถคำนวณ f(a) ได้ ซึ่งได้กรณีที่การหารด้วยศูนย์ขึ้น ในกรณีนี้จะมีกรอบของคำตอบของลิมิตดังนี้

•ถ้าตัวตั้งไม่เป็นศูนย์แต่ตัวหารเป็นศูนย์ สรุปว่าทันทีว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้

เช่น $\lim_{x\to 0} \frac{5}{x} = \frac{5}{0}$ = หาค่าไม่ได้

$\lim_{x\to -1} \frac{x}{1+x} = \frac{-1}{1+(-1)} = \frac{-1}{0}$ = หาค่าไม่ได้

$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \frac{1+2}{1-1} = \frac{3}{0}$ = หาค่าไม่ได้

$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{1}{0}$ = หาค่าไม่ได้

• ถ้าตัวตั้งเป็นศูนย์แต่ตัวหารไม่เป็นศูนย์ สรุปว่าทันทีว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ = 0

เช่น $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+2x+2} = \frac{0}{5}$ = 0

• ถ้าตัวตั้งเป็นศูนย์ แล้วตัวหารก็เป็นศูนย์ด้วยต้องจัดรูป f(x) ใหม่ก่อน เป้าหมายของการเปลี่ยนรูป f(x) คือ เพื่อให้เกิดการตัดกันของ x - a จากนั้นค่อยลองแทน a ลงไปใหม่การเปลี่ยนรูป f(x) จะใช้การแยกตัวประกอบ หรือ ไม่ก็ใช้คอนจูเกทคูณ

การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปที่ไม่กำหนด ($\frac{0}{0}$)

การหา $\lim_{x\to a} f(x)$ โดยการนำ a ไปแทนด้วย f(x) แล้วได้ผลเป็น f(a) ออกมาในรูป $\frac{0}{0}$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)$ อาจจะหาค่าได้โดยพยายามเปลี่ยนรูปของ f(x) ใหม่ เพื่อให้สามารถตัดทอนกันได้ระหว่างตัวเศษและตัวส่วน และค่อยนำไปหาลิมิตโดยมีหลักการเปลี่ยนรูปของ f(x) ดังนี้

1. โดยใช้เทคนิคการแยกตัวประกอบ
2. โดยใช้การคูณการคอนจูเกท

การคอนจูเกท หรือ สังยุค หมายถึง การจัดรูปของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปการแยกตัวประกอบพหุนามของผลต่างกำลังสอง ดังนี้ (น + ล)(น – ล) = น^2 – ล^2

เช่น คอนจูเกทของ $(\sqrt{x}+2)$ คือ $(\sqrt{x}+2)$

และ การคูณการคอนจูเกทจะได้ $(\sqrt{x}+2)\,(\sqrt{x}+2) = x-4$

การจัดรูปโดยเทคนิคการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ แล้วจงหาค่าของ $\lim_{x\to 2} f(x)$

วิธีทำ ตรวจสอบด้วยการนำ x = 2 ไปแทนค่าใน f(x) แล้วมีค่าเป็น $\frac{0}{0}$ แสดงว่า

เราต้องเปลี่ยนรูปของ f(x) ใหม่โดยการใช้การแยกตัวประกอบพหุนาม ดังนี้

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}$

วิธีทำ ลองแทนค่า x = 2 ก่อนเป็นอันดับแรกจะได้ $\dfrac{2^2-3(2)+2}{2(2^2)+2-10} = \dfrac{4-6+2}{8+2-10} = \dfrac{0}{0}$ แสดงว่าเราต้องเปลี่ยนรูปของ f(x) ใหม่โดยการใช้การแยกตัวประกอบพหุนาม ดังนี้

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(2x+5)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(2x+5)}$$

$$= \frac{2-1}{2(2)+5}$$

$$= \frac{1}{9}$$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ f(x) = $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ แล้วจงหาคำตอบของ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

วิธีทำ นำ x = 1 ไปแทนใน f(x) = $\dfrac{1^2-1}{2(1)^2-1-1} = \dfrac{0}{2-2} = \dfrac{0}{0}$

ต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน f ใหม่ โดยการคูณการแยกตัวประกอบพหุนาม

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(2x^2-x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(2x+1)}$$

$$= \frac{(1+1)}{2(1)+1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x^3-27)}$

วิธีทำ นำ x = 3 ไปแทนใน f(x) = $\frac{3-3}{3^3-27} = \frac{0}{27-27} = \frac{0}{0}$

ต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน f ใหม่ โดยการแยกตัวประกอบพหุนาม

จะได้ $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x^3-27)} = \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$

แยกตัวประกอบพหุนามผลต่างกำลังสาม

น^3 – ล^3 = (น – ล) (น^2 + นล+ ล^2)

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x^2+3x+9)}$$

$$= \frac{-1}{3^2+3(3)+9} = \frac{-1}{3^2+3(3)+9} = -\frac{1}{27}$$

การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้การคูณการคอนจูเกท

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ f(x) = $\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ แล้วจงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} f(x)$

วิธีทำ แทนค่า x = 0 ใน f(x) = $\frac{\sqrt{4+0}-2}{0} = \frac{0}{0}$ ต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน f ใหม่ โดยใช้การคอนจูเกท

จะได้ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1)(\sqrt{4+0}+2)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

วิธีทำ ตรวจสอบโดยแทนค่า x = 2ใน f(x) = $\frac{4-2^2}{3-\sqrt{2^2+5}} = \frac{0}{0}$

จึงต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน f ใหม่ก่อน โดยใช้การคอนจูเกท

จะได้ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 2} 3+\sqrt{x^2+5}$$

$$= 3+\sqrt{2^2+5} = 6$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-1}$

วิธีทำ ตรวจสอบโดยแทนค่า x = 1 ใน f(x) = $\frac{1-5+4}{1-1} = \frac{0}{0}$

จึงต้องเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน f ใหม่ก่อน โดยใช้การคอนจูเกท

จะได้ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x-4)(\sqrt{x}+1)$$

$$= (1-4)(1+1) \quad = -6$$

สรุปหลักการหาลิมิตของฟังก์ชัน

พิจารณา $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ให้แทน x ด้วย a (ใช้วิธีการแทนค่าตรงๆ)

- ถ้าได้ $\frac{\text{ตัวเลข}}{\text{ตัวเลข}}$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{ตัวเลข}}{\text{ตัวเลข}}$
- ถ้าได้ $\frac{0}{\text{ตัวเลข}}$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- ถ้าได้ $\frac{\text{ตัวเลข}}{0}$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} =$ หาค่าไม่ได้
- ถ้าได้ $\frac{0}{0}$ จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} =$ สรุปไม่ได้

(ใช้การแยกตัวประกอบ

ถ้าเข้าใจแล้วให้นักเรียน
ทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 4 ต่อเลยนะคะ

แบบฝึกทักษะชุดที่4

เรื่อง การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$

คำสั่ง จงแสดงวิธีการหาคำตอบอย่างเป็นขั้นตอน

1. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+x-30}{x^2-4x+3}$

....

....

....

....

2. จงหาค่าของ

....

....

....

....

3. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$

....

....

....

....

4. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

....

....

....

....

5. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{1+x}}{3-x}$

....

....

....

....

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ แล้วจะได้ว่า

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3 $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$

4. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$

6. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ = L - M

7. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$ = L · M

8. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ M ≠ 0

9. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$ เมื่อ $n \in I^+$

10. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

แบบฝึกทักษะชุดที่ 5

เรื่อง การลิมิตของฟังก์ชันโดยการใช้สูตร

11. $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $L \neq 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M = 0$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ หาค่าไม่ได้

คำชี้แจง จงหาค่าของลิมิตจากฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. $\lim_{x\to 2} x$

....

2. $\lim_{x\to -1} x^2$

....

3. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$

....

4. $\lim_{x \to 2} x + 3$

………

5. $\lim_{x \to 3} x^2 + 2x$

………

6. $\lim_{x \to -1} \left(x^2 - 5x + 10\right)$

………

7. $\lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

………

8. $\lim_{x \to -1} \frac{x+4}{x+2}$ $\lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

………

9. $\lim_{x \to -2} \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ $\lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

………

10. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ $\lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

………

11. $\lim_{x \to 3} (x+1)^2$ $\lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

………

12. $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^3 - 3x - 1}$ $\lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

………

13. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3+8}{x+2} \lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

....

14. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x+5} \lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

....

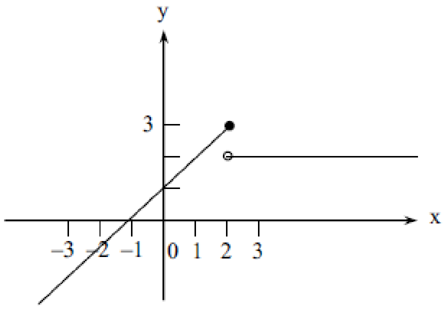
15. $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-9} \lim_{x \to 2} (x+1)(x+3)$

....

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังเรียน
เรื่อง การลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง : แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน ฉบับนี้มีข้อสอบ 15 ข้อ เป็นแบบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย × หน้าคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว ข้อละ 1 คะแนน เวลาที่ใช้ในการสอบ 20 นาที

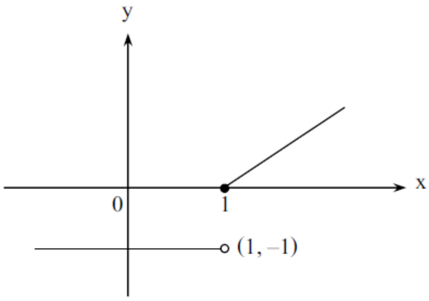
2. จากกราฟที่กำหนดให้ข้อใดไม่ถูกต้อง



ก. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$　　　　ข. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

ค. $\lim_{x \to 1} f(x) = 3,2$　　　　ง. $\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

1. จากกราฟที่กำหนดให้ ข้อใดไม่ถูกต้อง



ก. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$　　　　ข. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

ค. $\lim_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้　　　　ง. $\lim_{x \to 1} f(x) = -1,0$

5. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ เท่ากับข้อใด

ก. 1　　　　ข. 3

ค. -1　　　　ง. -3

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$ แล้ว f(x) มีลิมิตที่ 0 หรือไม่

ก. มี เพราะ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$　　　　ข. มีเพราะ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

ค. ไม่มี เพราะ $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$　　　　ง. ไม่มี เพราะ $\lim_{x \to 0} f(x) = \pm 1$

4. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 5 ข. 6

ค. 7 ง. 8

8. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$ เท่ากับข้อใด

ก. 3 ข. 2

ค. 1 ง. 0

6. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ เท่ากับเท่าใด

ก. 0 ข. 0.25

ค. 0.50 ง. 0.65

7. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{5}{7}$ ข. $\frac{6}{7}$

ค. $\frac{8}{7}$ ง. $\frac{9}{7}$

9. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ เท่ากับข้อใด

ก. 0 ข. 4

ค. -4 ง. 6

11. ถ้า f(x) = $\begin{cases} x+1\ ;\ x\le 3 \\ 3\ \ \ \ ;\ x>3 \end{cases}$ แล้ว $\lim_{x\to 3} f(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. 7 ข. 9

ค. 10 ง. หาค่าไม่ได้

12. $\lim_{x\to 2^-}|2x-3|$ เท่ากับข้อใด

ก. -1 ข. 1

ค. -3 ง. หาค่าไม่ได้

10. ถ้า f(x) = $\begin{cases} 3x & ; x > 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \le 2 \end{cases}$ แล้ว $\lim_{x \to 2} f(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. 6 ข. 9

ค. 11 ง. หาค่าไม่ได้

15. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. $\lim_{x \to 5}\left(\frac{x^2 - 25}{x - 5}\right) = 10$ ข. $\lim_{x \to 9}\left(\frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}\right) = \frac{1}{6}$

ค. $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x + 1}{x^2 - x - 2}\right) = 1$ ง. $\lim_{x \to 1}\left(\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 5}\right) = \frac{5}{6}$

13. $\lim_{x \to 5}(x^4)(x - 1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 500 ข. 5

ค. 2,500 ง. 5^7

14. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{1 - x}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. α ข. 0

ค. 6 ง. -6

ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1
เรื่อง การหาลิมิตข้างเดียวของฟังก์ชัน

คำชี้แจง จงหาลิมิตของฟังก์ชันโดยพิจารณาลิมิตข้างเดียวโดยใช้ตารางแสดงความสัมพันธ์

1. จงพิจารณาฟังก์ชัน f(x) = x + 5 ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 โดยเติมค่าของ f(x) ลงในตารางต่อไปนี้

x < 2		x > 2	
x	f(x)	x	f(x)
1.5	6.5	2.5	7.5
1.9	6.9	2.1	7.1
1.99	6.99	2.01	7.01
1.999	6.999	2.001	7.001

$\lim_{x\to 2} f(x) =$ ....7....................

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ ....7....................

$\lim_{x\to 2} f(x) =$

2. จงพิจารณาฟังก์ชัน f(x) = 2x – 1 ขณะที่ x เข้าใกล้ 3 โดยเติมค่าของ f(x) ลงในตารางต่อไปนี้

x <3		x >3	
x	f(x)	x	f(x)
2.5	4	3.5	6
2.9	4.8	3.1	5.2

$\lim_{x\to 3^-} f(x) =$ ....5.................

$\lim_{x\to 3^+} f(x) =$ ....5.................

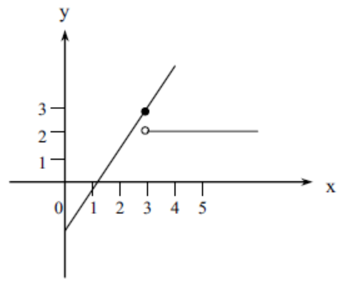
$\lim_{x\to 3} f(x) =$

2.99	4.98	3.01	5.02
2.999	4.998	3.001	5.002

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง การหาลิมิตของฟังก์ชันจากกราฟ

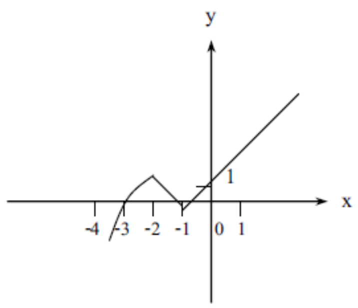
1.



$\lim_{x \to 1} f(x) =$ ....0...................

$\lim f(x) =$ ....หาค่าไม่ได้...........

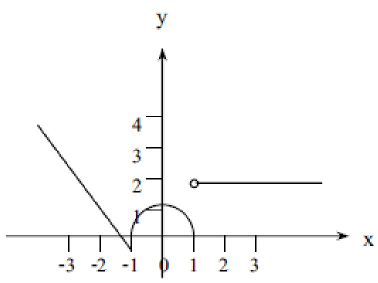
2.



$\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....0....................................

$\lim f(x) =$ ....1....................................

3.



$\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....0..................

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ ....หาค่าไม่ได้......

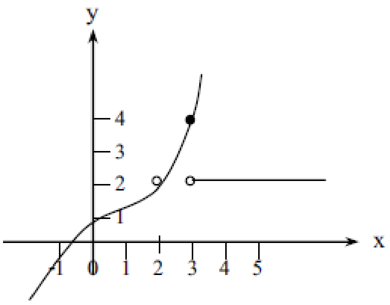
4.

$\lim_{x \to -1} f(x) =$ ....0..........................

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ ....2............................

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 3

เรื่อง การหาลิมิตสองด้าน



1. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 4x-1 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

<u>**วิธีทำ**</u> จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 1^-$ และกรณี $x \to 1^+$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 4x - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x + 1 = 3$$

จะเห็นว่า $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

2. จงหาค่า $\lim_{x \to 0} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 3x+1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

<u>**วิธีทำ**</u> จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 0^-$ และกรณี $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 3x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 - x = 2$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x) =$ หาค่าไม่ได้

3. จงหาค่า $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{2-x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ 2x-3 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 0^-$ และกรณี $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x-3 = -3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3x+2}{2-x} = 1$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0} f(x) =$ หาค่าไม่ได้

4. จงหาค่า $\lim_{x\to 1} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f มีค่าสัมบูรณ์ของ x ดังนั้น ฟังก์ชัน f จะถูกแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x} & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน f แบ่งเป็น 2 กรณี ทั้งในกรณี $x \to 1^-$ และกรณี $x \to 1^+$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0$$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

5. จงหาค่า $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

วิธีทำ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f มีค่าสัมบูรณ์ของ x ดังนั้น ฟังก์ชัน f จะถูกแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ \dfrac{-(x-2)}{x^2-3x+2} & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = -1$$

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 4

เรื่อง การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปไม่กำหนด $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+x-30}{x^2-4x+3}$

วิธีทำ $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+x-30}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+3x+10)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+3x+10)}{(x-1)}$$

$$= \frac{3^2+3(3)+10}{3-1} = \frac{28}{2} = 14$$

2. จงหาค่าของ $\lim_{x\to \frac{1}{3}} \frac{6x^3-11x^2+6x-1}{6x^2-11x+3}$

วิธีทำ $\lim_{x\to \frac{1}{3}} \frac{6x^3-11x^2+6x-1}{6x^2-11x+3} = \lim_{x\to \frac{1}{3}} \frac{(3x-1)(2x^2-3x+1)}{(3x-1)(2x-3)}$

$$= \lim_{x\to \frac{1}{3}} \frac{(2x^2-3x+1)}{(2x-3)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1}{2\left(\frac{1}{3}\right) - 3} = -\frac{2}{21}$$

3. จงหาค่าของ $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$

วิธีทำ $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+3)}{(x+3)(x^2+1)}$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{(-3-3)(3^2+3)}{(-3)^2+1} = \frac{-72}{10} = \frac{-36}{5}$$

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{3}{2}$$

5. จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3} \frac{2-\sqrt{1+x}}{3-x}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 3} \frac{2-\sqrt{1+x}}{3-x} = \lim_{x \to 3} \frac{2-\sqrt{1+x}}{3-x} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{1+x}}{2+\sqrt{1+x}}\right)$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{4-(1+x)}{(3-x)(2+\sqrt{1+x})}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(3-x)}{(3-x)(2+\sqrt{1+x})} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 5

เรื่อง การลิมิตของฟังก์ชันโดยการใช้สูตร

1. $\lim_{x\to 2} x$ **ตอบ** 2

2. $\lim_{x\to -1} x^2$ **ตอบ** 1

3. $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$ **ตอบ** 2

4. $\lim_{x\to 2} x+3$ **ตอบ** 5

5. $\lim_{x\to 3} x^2+2x$ **ตอบ** 15

6. $\lim_{x\to -1} \left(x^2-5x+10\right)$ **ตอบ** 16

7. $\lim_{x\to 2} (x+1)(x+3)$ **ตอบ**15

8. $\lim_{x\to -1} \frac{x+4}{x+2}$ **ตอบ** 3

9. $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+2x+3}$ ตอบ $\sqrt{3}$

10. $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ ตอบ $\frac{1}{2}$

11. $\lim_{x\to 3}(x+1)^2$ ตอบ16

12. $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^3-3x-1}$ ตอบ $\sqrt{109}$

13. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+8}{x+2}$ ตอบ 4

14. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x+5}$ ตอบ 0

15. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-9}$ ตอบ 0

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ก่อนเรียน
เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ	ตอบ	ข้อ	ตอบ	ข้อ	ตอบ
1	ง	6	ค	11	ง
2	ค	7	ก	12	ก
3	ค	8	ก	13	ค
4	ง	9	ข	14	ข
5	ก	10	ง	15	ค

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังเรียน
เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน

ข้อ	ตอบ	ข้อ	ตอบ	ข้อ	ตอบ
1	ค	6	ก	11	ก
2	ง	7	ค	12	ง
3	ก	8	ก	13	ค
4	ค	9	ข	14	ค
5	ง	10	ง	15	ข

บรรณานุกรม

กนกวลีอุษณกรกุลและรณชัยมาเจริญทรัพย์. (2548). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมม.6 เล่ม 2**. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.

กมลเอกไทยเจริญ. **แคลคูลัส 1**.(2537).กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กวิยาเนาวประทีป. (2555). **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ :แคลคูลัสเบื้องต้น.** กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

จักรินทร์วรรณโพธิ์กลาง.(2555). **คู่มือสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมม.4 – 6 เล่ม 6.**กรุงเทพฯ : พ.ศ. พัฒนา.

จำรัสอินสม. (2547). **คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพฯ : แม็ค.

จีระเจริญสุขวิมลและวินิจวงศ์รัตนะ.(ม.ป.ป.).**สรุปสูตรหลัก&สูตรคณิตศาสตร์ม.6เล่ม 5 – 6**.

กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่งจำกัด.

ธนวัฒน์ (สันติ) สนทราพรพล. (2547). **คณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 , 5 , 6) เล่ม 6 สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง,

ธีระศักดิ์ อุรัจนานันท์. (2546). **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร = CalculusI for engineers.**กรุงเทพฯ : สกายบุ๊ค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ. (2548). **คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

สมัยเหล่าวานิชย์และพัวพรรณเหล่าวานิชย์. (2558). **คณิตศาสตร์มัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 6 (รายวิชาพื้นฐานและเพิ่มเติม)**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับพับลิชชิ่ง.

สุกัญญาสนิทวงศ์ณอยุธยา. (2555). **แคลคูลัส 1 ฉบับเสริมประสบการณ์.** กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์.